

ANALYTISKA FUNKTIONER

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 24.9.2009

1. Undersök om följande gränsvärden existerar: (a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$, (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$, (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|}$.

2. (a) Låt $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z = x+iy$ och $z_0 = x_0+iy_0$. Visa att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \text{ och } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \beta \right).$$

(b) Låt $z = x+iy$. Bestäm gränsvärdet för uttrycket $\frac{x}{x^2+3y} + i xy$, då $z \rightarrow 1-i$.

3. Visa att om funktionen f är kontinuerlig i punkten z_0 så är även funktionen $\bar{f}$ kontinuerlig i z_0 .

4. Undersök, med hjälp av derivatans definition, i vilka punkter $f(z) = |z|^2$ är deriverbar.

5. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns differentialekvationer att

(a) $f(z) = 2y-ix$, ($z = x+iy$), (b) $f(z) = \operatorname{Re} z$,

saknar derivata i alla punkter.

6. Visa att Cauchy-Riemanns differentialekvationer i polära koordinater antar formen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

(Antag att $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ är analytisk och sätt $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$).